О некоторых свойствах теплицевых матриц

Н. А. Сипатров, email: nikita.sipatrov@yandex.ru
А. О. Лачинов, email: avatar31221@yandex.ru
Н С. Савельев, email: nssavelyev01@ya.ru
А. Д. Ваничкин, email: vanamaka@mail.ru
Т. В. Стариков, email: TVS_7@mail.ru

Краснодарское высшее военное орденов Жукова и Октябрьской Революции Краснознаменное училище имени генерала армии С.М. Штеменко

Аннотация. *В данной работе исследуются некоторые свойства Теплицевых матриц с учетом различных матричных произведений.*

Ключевые слова: *теплицевы матрицы.*

Введение

Матрицы Теплица важны как в теории, так и в практике. Например, известно, что огромный класс матриц подобен матрицам Теплица. Кроме того, это показывает, что каждая матрица является произведением Теплицевых матриц [1].

Матрица Теплица обозначается как $T = [t_{ij}] = [t_{i-j}]$, при $1 \leq i, j \leq n$, что означает, что все записи вдоль каждой из диагоналей одинаковы. Циркулянтная матрица C – это Матрица Теплица, где каждая строка получена путем применения перестановки ($1,2 \dots n$) к предыдущей строке. Косая циркулянтная матрица S отличается от циркулянтной матрицы C только знаком в субдиагональных записях, т.е. $s_{ij} = c_{ij}$ когда $j \geq i$ и $s_{ij} = -c_{ij}$ когда $j < i$. Матрица T инвалютивна если $T^2 = I$ и называется нильпотентом степени k если $T^k = 0$, но $T^{k-1} \neq 0$.

1. Произведение Теплицевых матриц над коммутативным кольцом

Рассмотрим три различные бинарные операции: обычное матричное умножение, произведение Кронекера и Шура, обозначаемые соответственно AB, $A \otimes B$ и $A * B$. За исключением произведения Шура множество Теплицевых матриц не замкнуто ни при обычном умножении матрицы ни при произведении Кронекера Мы охарактеризуем те пары Теплицевых матриц произведение которых относительно обычного умножения или произведения Кронекера.

Следующая теорема дает характеристику в терминах обычного матричного умножения:

Теорема 1.1. Если $A = (\alpha_{i-j})$ и $B = (\beta_{i-j})$ являются двумя n x n Теплицевыми матрицами над коммутативным кольцом, то AB является Теплицевой матрицей тогда и только тогда, когда следующая система уравнений из $(n-1)^2$ с $4(n-1)$ переменными содержит: $\alpha_i \beta_{-j} - \alpha_{i-n}\beta_{n-j} = 0$, где $1 \le i$, $j \le n-1$

Доказательство. Если мы установим $C = AB$, то по формуле произведения получим:

$$c_{i+1\,j+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{(i+1)-k}\beta_{k-(j+1)} = \alpha_i \beta_{-j} + \sum_{k=2}^{n} \alpha_{(i+1)-k}\beta_{k-(j+1)}$$

$$= \alpha_i \beta_{-j} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{i-k}\beta_{k-j} = \alpha_i \beta_{-j} - \alpha_{i-n}\beta_{n-j} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i-k}\beta_{k-j}$$

$$= \alpha_i \beta_{-j} - \alpha_{i-n}\beta_{n-j} + c_{ij}$$

По определению C является Теплицевой матрицей тогда и только тогда, когда $c_{i+1\,j+1} = c_{ij}$. Следовательно, C – матрица Теплица тогда и только тогда, когда $\alpha_i \beta_{-j} - \alpha_{i-n}\beta_{n-j} = 0$, где $1 \le i$, $j \le n-1$.

Ясно, что обратная произвольной несингулярной Теплицевой матрице не обязательно является Теплицевой. Однако следующее предложение показывает, как сохранение при инверсии по отношению к Теплицевой матрице связано с сохранением при умножении. Для матрицы над коммутативным кольцом мы можем вычислить коэффициенты полинома $p_A(x)$ многими различными путями, включая собственные значения матрицы или элементы матрицы. В частности, мы хотим использовать следующую формулу для вычисления коэффициентов [2]:

$$p_A(x) = \sum_{m=0}^{n} x^{n-m}(-1)^m tr(\Lambda^m A),$$

где $\Lambda^m A$ это m^{th} exterior power of A. Кроме того, если характеристика коммутативного кольца равна 0, то известно, что $tr(\Lambda^m A) = \frac{1}{m!} det(C)$, где

$$C = \begin{pmatrix} tr(A) & m-1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ tr(A^2) & tr(A) & m-2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ tr(A^3) & tr(A^2) & tr(A) & m-3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ tr(A^{m-1}) & tr(A^{m-2}) & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ tr(A^m) & tr(A^{m-1}) & \dots & \dots & tr(A^3) & tr(A^2) & tr(A) \end{pmatrix}$$

Предложение 1.2. Для $n \times n$ обратимой матрицы Теплица $A = (\alpha_{i-j})$ над коммутативным кольцом, если каждое A^m при $m = 2, \dots, n-1$ является матрицей Теплица, то тогда A^{-1} является теплицевой матрицей. Кроме того, если матрица Теплица рассматривается над кольцом нулевой характеристики, мы имеем $tr(A^m) = n(A^m)_0$, где

$$(A^m)_0 = \sum_{k_{m-1}=0}^{n-1} \alpha_{-k_{m-1}} \sum_{k_{m-2}=0}^{n-1} \alpha_{k_{m-1}-k_{m-2}} \sum_{k_{m-3}=0}^{n-1} \alpha_{k_{m-2}-k_{m-3}} \dots,$$

$k_0 = 0$ и $\sum_{k_0=0}^{n-1}$ исчезает.

Доказательство. По теореме Кайли-Хэмилтона $A^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{det(A)}(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} \dots + c_1 I)$, где каждый коэффициент c_{n-m} полинома может быть явно вычислен как сумма всех принципиальных миноров A размера m. Кроме того, если матрица рассматривается над коммутативным кольцом нулевой характеристики, то мы имеем $c_{m-n} = \frac{(-1)^m}{m!} det(C)$.

Теорема 1.3. Пусть $A = (\alpha_{i-j})$ $n \times n$ Теплицева матрица и $B = (\beta_{i-j})$ $m \times m$ Теплицева матрица над коммутативным кольцом. Матрица $mn \times mn$ $A \otimes B$ является Теплицевой тогда и только тогда, когда выполняется следующая система уравнений из $2(m-1)(n-1)$ уравнений с $2(n+m)-3$ переменными:

$$\alpha_i \beta_j = \begin{cases} \alpha_{i-1} \beta_{m+j} & j < 0 \quad u \quad i \neq 1 - n \\ \alpha_{i+1} \beta_{j-m} & j > 0 \quad u \quad i \neq n - 1 \end{cases}$$

где $i \in \{1 - n, 2 - n, \ldots, n - 2, n - 1\}$ и $j \in \{1 - m, 2 - m, \ldots, m - 2, m - 1\} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Что касается умножения Кронекера на две матрицы, то $A \otimes B$ состоит из n^2 блоков матриц Теплица, и она является теплицевой тогда и только тогда, когда каждая из диагоналей $(2nm - 1)$ имеет одинаковые записи, т.е. тогда и только тогда, когда для каждой диагонали, которая состоит из конкатенации диагоналей соседних блоков, записи согласуются друг с другом [3].

Представленные результаты используются в работах [4-10] при описании крипто-кодовых преобразований контроля и восстановления целостности данных.

Заключение

Матрицы Теплица применяются в различных задачах прикладной математики и техники таких как теория массового, обслуживания, обработка сигналов, анализ временных рядов интегральные уравнения и т д. Несмотря на то что Матрицы Теплица существуют уже давно, существует еще ряд открытых проблем касающихся матриц теплица и их операторов. Один из них подсчет – числа инволюционных и нильпотентных Теплицевых матриц над конечным полем. В настоящей работе даны характеристики для пар Теплицевых матриц над коммутативным кольцом относительно обычного умножения или произведения Кронекера.

Список литературы

1. L.H. Lim, K. Ye, Every matrix is a product of a Toeplitz matrices, 2013.
2. D. Kucerovsky, A. Sarraf, Schur Multipliers and Matrix Products, Houston Journal of Mathematics, Vol. 40, No. 3, 2014.
3. K.R. Driessel, A relation between some special centro-skew, near Toeplitz, tridiagonal matrices and circulant matrices, 2011.
4. Диченко, С. А. Концептуальная модель обеспечения целостности информации в современных системах хранения данных / С. А. Диченко // Информатика: проблемы, методология, технологии. Сборник материалов XIX международной научно-методической конференции. Под ред. Д. Н. Борисова. – Воронеж, 2019. – С. 697-701.
5. Диченко, С. А. Контроль и обеспечение целостности информации в системах хранения данных / С. Диченко // Наукоемкие

технологии в космических исследованиях Земли. – 2019. – Т. 11. – № 1. – С. 49-57.

6. Диченко, С. А. Гибридный крипто-кодовый метод контроля и восстановления целостности данных для защищённых информационно-аналитических систем / С. Диченко, О. Финько // Вопросы кибербезопасности. – 2019. – № 6(34). – С. 17-36.

7. Dichenko, S. Two-dimensional control and assurance of data integrity in information systems based on residue number system codes and cryptographic hash functions / S. Dichenko, O. Finko // Integrating Research Agendas and Devising Joint Challenges International Multidisciplinary Symposium ICT Research in Russian Federation and Europe. – 2018. – P. 139-146.

8. Диченко, С. А. Системный анализ проблемы обеспечения целостности данных в информационно-аналитических системах / С. А. Диченко // Информатика: проблемы, методы, технологии. Сборник материалов XX Международной научно-методической конференции. Под ред. А.А. Зацаринного, Д.Н. Борисова. – Воронеж, 2020. – С. 1001-1005.

9. Диченко, С. А. Алгоритм проверки достоверности контрольной информации, используемой при обеспечении целостности данных в условиях деструктивных воздействий злоумышленника и среды / С. А. Диченко // Информатика: проблемы, методы, технологии. Сборник материалов XX Международной научно-методической конференции. Под ред. А.А. Зацаринного, Д.Н. Борисова. – Воронеж, 2020. – С. 996-1000.

10. Диченко, С. А. Разработка алгоритма контроля и обеспечения целостности данных при их хранении в центрах обработки данных / С. А. Диченко [и др.] // Сб. науч. статей VIII Междунар. молод. научнопр. конф. с элементами науч. шк. – Омск: Омский ГТУ, 2018. – С. 40-43.